MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Matej Drahovský

Deskriptivní kvalita množin v analýze

Katedra matematické analýzy

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Petr Holický, CSc
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Matematická analýza

Praha 2016

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.
Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne Podpis autora

Název práce: Deskriptivní kvalita množin v analýze
Autor: Matej Drahovský
Katedra (ústav): Katedra matematické analýzy
Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Petr Holický, CSc

Abstrakt: V předložené práci studujeme metody kterými můžeme určit vlastnostech množin, jejíž existence je dokázana nekonstruktivně. Hlavní oblastí zájmu je studovat vlastnosti množiny B, podmnožiny reálné osi takové, že součty jsou prosté a na reálnou os. Primárně sme se snažili zodpovědět otázku, zda může taková množina být borelovská. V práci referujeme hlavně již známé výsledky, při kterých naznačíme jeich souvislost s tímhle problémem. Z vlastních výsledků tu ukážeme, že množina B nemůže být F_σ, ale může být Lebesgueovsky měřitelná. Také předvedeme několik příkladů, které naznačují, jaké výsledky můžeme čekat ohledem σ-pórovitosti a Hausdorffovi dimenze množiny B.

Klíčová slova: Hausdorffova dimenze, packing dimenze, selekce, σ-pórovitost, množina s prostými součty

Title: Descriptive quality of sets in analysis
Author: Matej Drahovský
Department: Název katedry či ústavu v angličtině
Supervisor: doc. RNDr. Petr Holický, CSc

Abstract: In the presented work we study methods that have been used to determine properties of some sets, existence of which was prooven non-contructively. Our main objective was to study properties of set B, subset of real line such that sum is both injective and onto real line. Mostly we were concerned whether this set could be Borel. In this thesis, we mostly present konwn results with some connection to this problem. We show that set B cannot be F_σ, but may be measurable with respect to Lebesgue measure. Also we show some partial results concerning σ-porosity and Hausdorff dimension of set B.

Keywords: Hausdorff dimension, packing dimension, selection, σ-porosity, set with injective sum

Názov práce: Deskriptivní kvalita množin v analýze
Autor: Matej Drahovský
Katedra (ústav): Katedra matematické analýzy
Vedúc diplomovej práce: doc. RNDr. Petr Holický, CSc

Abstrakt: V predloženej práci študujeme metódy, ktorými môžeme určiť vlastnosti množín, ktorých existencia je dokázaná nekonštruktívne. Hlavnou oblasťou záujmu je študovať vlastnosti množiny B, podmnožiny reálnej osi takej, že súčty sú prosté a na reálnu os. V prvom rade sme sa snažili zodpovedať otázku, či môže takáto množina byť borelovská. V práci väčšinou referujeme už známe výsledky, pri ktorých naznačíme ich súvislosť s týmto problémom. Z vlastných výsledkov tu ukážeme, že množina B nemôže byť F_σ, ale môže byť Lebesgueovsky merateľná. Tiež predvedieme niekoľko príkladov, ktoré naznačujú, aké výsledky môžeme čakať ohľadom σ-pórovitosti a Hausdorffovej dimenzie množiny B.

Kľúčové slové: Hausdorffova dimenzia, packing dimenzia, selekcia, σ-pórovitosť, množina s prostými súčtami

Obsah

Úvod

V tejto práci popisujeme niektoré spôsoby ako rozhodnúť či množina, ktorej existencia sa ukáže z axiómy výberu, môže byť merateľná (napr. v Lebesgueovej miere na $\mathbb{R}$), prípadne borelovská. Zároveň sa snažíme tieto výsledky využiť pri riešení problému, či podmnožina reálnych čísel taká, sčítanie prosté a na $\mathbb{R}$, môže byť borelovská.

Predtým než presne definujeme, aké vlastnosti má táto množina mať, základné značenie. Pre množinu B a prirodzené číslo $n \in \mathbb{N}$ bude symbol $[B]^n$ značiť systém všetkých $n-$prvkových podmnožín B a symbolom $[B]^{<n}$ budeme značiť systém všetkých nanajvýš $n-$prvkových podmnožín B. Ďalej pre $A, B \subset \mathbb{R}$ značíme $A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$. Ak množina A je jednoprvková množina $\{a\}$, budeme písať $a + B$ namiesto $\{a\} + B$. Pre množinu A symbolom $|A|$ značíme jej kardinalitu.

V tomto texte študujeme vlastnosti množiny $B \subset \mathbb{R}$ spĺňajúcej:

(P) pre $a, b, c, d \in B$ platí: $a + b = c + d \implies \{a, b\} = \{c, d\}$, t.j. zobrazenie $p : [B]^{<2} \to \mathbb{R}$ kde $p(\{a, b\}) = a + b$ je prosté;

(N) pre každé $x \in \mathbb{R}$ existujú $a, b \in B$ také, že $a + b = x$, t.j. $\mathbb{R} = B + B$.

V prvej kapitole ukážeme, ako sa množina s týmito vlastnosťami skonštruuje pomocou axiómy výberu. Taktiež ukážeme že takáto množina sa dá skonštruovať tak aby nebola borelovská a dokonca ani merateľná alebo s Bairovov vlastnosťou. Na konci prvej kapitoly ešte ukážeme, že analytická množina s týmito vlastnosťami už musí byť borelovská.

V druhej kapitole sa budeme zaoberať merateľnosťou vzhľadom k Lebesgueovej miera a Bairovov vlastnosťou. Predvedieme známy príklad Hamelovej bázy a dôkaz jej neborelovskosti pomocou nemerateľnej množiny. Tiež ukážeme, že ak je množina s vlastnosťami Lebesgueovsky merateľná, tak je nulová a ak má Bairovu vlastnosť, tak je prvej kategórie. Na konci druhej kapitoly preto študujeme či takáto množina musí byť σ-pórovitá.

V tretej kapitole študujeme čo vieme povedať o Hausdorffovej dimenzii množín s vlastnosťami (P) alebo (N). Keďže Hausdorffova dimenzia sa neukáže ako prirodzený nástroj na štúdium týchto množín, spomenieme aj packing dimenziu, pri o ktorej už aspoň čiastočne vieme niečo povedať.

V štvrtej kapitole sa pozrieme na selekcie a uniformizácie, a predvedieme príklad obdĺžnika, ktorý nemá borelovský matching.

Ešte pripomeňme niektoré z použitých pojmov. Topologický priestor nazývame *poľský*, ak je separabilný a úplne metrizovateľný. Podmnožinu poľského priestoru nazveme *borelovskou*, ak patrí do σ-algebry generovanej otvorenými množinami. Množinu A, podmnožinu poľského priestoru X, nazveme *analytickou*, ak existuje poľský priestor Y a spojité zobrazenie $f : Y \to X$ také, že $f[Y] = A$.

Pripomeňme niekoľko vlastností analytických množín, dôkazy týchto tvrdení sa dajú nájsť napríklad v Kechris (1995). Každá borelovská množina je analytická, systém analytických množín je uzavretý na spočetné prieniky a zjednotenia, a na obraz pri spojitom zobrazení. Ak A je analytická množina, tak A je buď spočetná, alebo obsahuje homeomorfnú kópiu Cantorovho diskontinua. Analytické množiny sú univerzálne merateľné, t.j. sú merateľné v každej úplnejσ-konečnej borelovskej miere na X.

Kapitola 1

Konštrukcia a základné vlastnosti

1.1 Ekvivalentné formulácie

Pred tým než ukážeme existenciu množiny si vlastnosťami (P) a (N), sformulujeme niekoľko ekvivalentných vlastností.

Tvrdenie 1. *Nech $B \subset \mathbb{R}$, potom je ekvivalentné:*

1. *B má vlastnosť (P);*
2. *zobrazenie $\{a, b\} \mapsto |a - b|$ je prosté na $[B]^2$;*
3. *pre každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je $B \cap (x + B)$ najviac jednoprvková;*
4. *pre každé $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ priamka tvaru $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = z\}$ pretne $B \times B$ v najviac jednom bode;*
5. *pre každé $z \in \mathbb{R}$ priamka tvaru $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = z\}$ pretne $B \times B$ v najviac dvoch bodoch.*

Dôkaz. Nech B má vlastnosť (P) a nech $a, b, c, d \in B$, $a > b$ a $c > d$ spĺňajú: $a - b = c - d$, potom zjavne $a + d = c + b$ a teda z podmienky (P) $\{a, d\} = \{c, b\}$ odtiaľ, keďže $a \neq b$, dostávame $a = c$ a $b = d$ a teda zobrazenie $\{a, b\} \mapsto |a - b|$ je na množine $[B]^2$ prosté.

Nech zobrazenie $\{a, b\} \mapsto |a - b|$ je prosté na $[B]^2$, nech $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a nech $a, b \in B \cap (x + B)$. Potom $a + x = c$, $b + x = d$ kde $c, d \in B$. Takže $a - c = b - d$ a keďže $x \neq 0$, z prostoty máme $\{a, c\} = \{b, d\}$. Ak by platilo $a = d$, potom z rovnosti množín je $b = c$ a teda $a = d = b + x = c + x = a + 2x$ čo dáva spor s $x \neq 0$. Takže $a = b$ a teda množina $B \cap (x + B)$ je pre všetky nenulové x najviac jednoprvková.

Ďalej v tomto dôkaze budeme pre $z \in \mathbb{R}$ značiť $p_z^+ := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = z\}$ a $p_z^- := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = z\}$.

Nech B má vlastnosť z podmienky 3. Nech $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a $(a, b), (c, d) \in p_z^- \cap B \times B$. Potom $a = z + b$ a $c = z + d$, teda $a, c \in B \cap (z + B)$ a teda $a = c$ a $b = d$. Takže pre nenulové $z \in \mathbb{R}$ je $p_z^- \cap B \times B$ najviac jednoprvková.

Nech B nespĺňa podmienku 5. Potom existuje $z \in \mathbb{R}$ a tri rôzne body $X, Y, Z \in p_z^+ \cap B \times B$. Úsečky XY a XZ tvoria uhlopriečky dvoch štvorcov so stranami rovnobežnými so súradnicovými osami. Ostatné dva vrcholy v každom zo štvorcov ležia na priamke $p_{z_{XY}}^-$ (resp. $p_{z_{XZ}}^-$) pre vhodné $z_{XY}, z_{XZ} \in \mathbb{R}$. Keďže štvorce zdieľajú vrchol X a body Z a Y sú rôzne, musí jedno zo z_{XY}, z_{XZ} byť nenulové. Keďže vrcholy X, Y (resp. X, Z) ležia v množine $B \times B$, tak tam ležia aj ostatné dva vrcholy štvorcov. Takže sme našli nenulové z_0 a dva body z $B \times B$ ležiace na priamke $p_{z_0}^-$. Takže B nespĺňa podmienku 4.

Konečne, nech B má vlastnosť z podmienky 5. Nech $a \leq b$ a $c \leq d$ sú z B a $a+b = c+d = z$. Potom $(a,b), (b,a), (c,d), (d,c) \in B \times B \cap p_z^+$ a z podmienky 5 ide o najviac dva rôzne body. Ak $(a,b) \in \{(c,d), (d,c)\}$, tak zjavne $\{a,b\} = \{c,d\}$. Rovnako rovnosť množín dostane pre prípady $(b,a) \in \{(c,d), (d,c)\}$,$(c,d) \in \{(a,b), (b,a)\}$ a $(d,c) \in \{(a,b), (b,a)\}$. Zostáva možnosť $(a,b) = (b,a)$ a $(c,d) = (d,c)$, keďže len jeden bod tvaru (x,x) leží na priamke p_z^+, máme $(a,b) = (c,d)$ a teda $a = b = c = d$. Odtiaľ $\{a,b\} = \{c,d\}$. Takže množina B má vlastnosť (P). $\square$

Tvrdenie 2. *Nech $B \subset \mathbb{R}$, je ekvivalentné:*

1. *B má vlastnosť (N);*
2. *$\bigcup_{x \in B} x + B = \mathbb{R}$;*
3. *pre každé $z \in \mathbb{R}$ priamka tvaru $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = z\}$ pretne $B \times B$.*

Dôkaz. Zjavne $B + B = \bigcup_{x \in B} x + B$ a teda prvé dve tvrdenia sú ekvivalentné. Z definície, $B + B = \mathbb{R}$ práve vtedy, keď pre každé $z \in \mathbb{R}$ existujú $a, b \in B$ také, že $a + b = z$ a toto je ekvivalentné tretiemu tvrdeniu. $\square$

1.2 Konštrukcia množiny s vlastnosťami (P) a (N)

Lema 3. *Nech $A \subset \mathbb{R}$ spĺňa: pre každé $x \in \mathbb{R}$ je množina $\{a \in A : x - a \in A\}$ nekonečná a až na spočetne veľa $x \in \mathbb{R}$ má táto množina mohutnosť kontinua. Potom existuje $B \subset A$ s vlastnosťami (P) a (N).*

Dôkaz. Postupujeme transfinitnou indukciou, označme ω_C prvý ordinál mohutnosti kontinua. Označme $S := \{x \in \mathbb{R} : |\{a \in A : x - a \in A\}| < |\omega_C|\}$. Nech $\{x_\lambda : \lambda < \omega_C\}$ je dobré usporiadanie $\mathbb{R}$ také, že $S \subset \{x_\lambda : \lambda < \omega\}$. Zvoľme $a \in A$ také, že $x_0 - a \in A$ a položme $B_0 := \{a, x_0 - a\}$. Nech $\lambda < \omega_C$ a pre $\alpha < \lambda$ nech už máme zostrojenú množinu B_α spĺňajúcu:

- mohutnosť B_α je menej ako kontinuum a pre $\alpha < \omega$ je táto množina konečná;
- $B_\alpha \subset A$ a má vlastnosť (P);
- pre $\beta < \alpha$ je $B_\beta \subset B_\alpha$ a x_β môžeme vyjadriť ako súčet dvoch prvkov z B_α.

Položme $B'_\lambda := \bigcup_{\alpha<\lambda} B_\alpha$.

Ak $x_\lambda \in (B'_\lambda + B'_\lambda)$, tak položíme $B_\lambda := B'_\lambda$. Zjavne B_λ má požadovanú mohutnosť, je podmnožinou A a spĺňa tretiu podmienku. Potrebujeme overiť, že B_λ má vlastnosť (P). Ak ale $a+b=c+d$, tak nájdeme $\alpha<\lambda$ také, že $\{a,b,c,d\} \subset B_\alpha$ a teda, keďže B_α má vlastnosť (P), je $\{a,b\}=\{c,d\}$. Takže B_λ spĺňa indukčný predpoklad.

Nech $x_\lambda \notin (B'_\lambda + B'_\lambda)$. Pre $a \in \mathbb{R}$ platí: $(B'_\lambda \cup \{a, x_\lambda - a\}) + (B'_\lambda \cup \{a, x_\lambda - a\}) = (B'_\lambda + B'_\lambda) \cup (\{a\} + B'_\lambda) \cup (\{x_\lambda - a\} + B'_\lambda) \cup \{2a, 2x_\lambda - 2a, x_\lambda\}$. Keďže množina B'_λ má vlastnosť (P), k tomu aby množina $B'_\lambda \cup \{a, x_\lambda - a\}$ spĺňala indukčný predpoklad nám stačí nájsť $a \in A$ také, že $(x_\lambda - a) \in A$ a množiny v zjednotení sú po dvoch disjunktné. To nám dáva nasledujúce podmienky na a:

1. $(B'_\lambda + B'_\lambda) \cap (\{a\} + B'_\lambda) = \emptyset$ dáva $a \notin (B'_\lambda + B'_\lambda - B'_\lambda)$;
2. $(B'_\lambda + B'_\lambda) \cap (\{x_\lambda - a\} + B'_\lambda) = \emptyset$ dáva $a \notin (x_\lambda + B'_\lambda - B'_\lambda - B'_\lambda)$;
3. $(\{a\} + B'_\lambda) \cap (\{x_\lambda - a\} + B'_\lambda) = \emptyset$ dáva $2a \notin (x_\lambda + B'_\lambda - B'_\lambda)$;
4. $(B'_\lambda + B'_\lambda) \cap \{2a, 2x_\lambda - 2a, x_\lambda\} = \emptyset$ dáva $2a \notin (B'_\lambda + B'_\lambda)$ a $2a \notin (2x_\lambda - B'_\lambda - B'_\lambda)$;
5. $(\{a\} + B'_\lambda) \cap \{2a, 2x_\lambda - 2a, x_\lambda\} = \emptyset$ dáva $a \notin B'_\lambda$, $3a \notin (2x_\lambda - B'_\lambda)$ a $a \notin (x_\lambda - B'_\lambda)$;
6. $(\{x_\lambda - a\} + B'_\lambda) \cap \{2a, 2x_\lambda - 2a, x_\lambda\} = \emptyset$ dáva $3a \notin (x_\lambda + B'_\lambda)$.

Keďže $(B'_\lambda + B'_\lambda) = \bigcup_{b \in B'_\lambda} (b + B'_\lambda)$ a keďže $b + B'_\lambda$ má rovnakú mohutnosť ako B'_λ je vidieť, že všetky množiny do ktorých a podľa podmienok 1 až 6 nepatrí sú pre $\lambda < \omega$ konečné a pre $\lambda \geq \omega$ majú mohutnosť menšiu ako kontinuum. Takže podľa predpokladu na množinu A musí existovať $a \in A$ také, že $(x_\lambda - a) \in A$ a a nepatria do žiadnej z množín v podmienkach 1 až 6. Položme $B_\lambda := B'_\lambda \cup \{a, x_\lambda - a\}$. Zjavne B_λ spĺňa indukčný predpoklad.

Konečne, položme $B = \bigcup_{\lambda<\omega_C} B_\lambda$. Zjavne B je hľadaná množina. $\square$

1.3 Deskriptívne vlastnosti

Veta 4. *Ak množina s vlastnosťami (P) a (N) je analytická, tak je borelovská.*

Dôkaz. Nech B je analytická a má vlastnosti (P) a (N). Z podmienky 5 v tvrdení 1 a podmienky 3 v tvrdení 2 dostávame, že obrazom analytickej množiny $(B \times B) \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$ pri projekcii na priamku $\{(x,x) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$ je množina $\{(x,x) : x \notin B\}$. Keďže projekcia aj zobrazenie $(x,x) \mapsto x$ sú spojité, dostávame, že $\mathbb{R} \backslash B$ je analytická a teda B je borelovská. $\square$

Veta 5. *Existuje množina s vlastnosťami (P) a (N), ktorá nieje analytická ani ko-analytická.*

Dôkaz. Nech $\{C_\beta : \beta < \omega_C\}$ je dobré usporiadanie všetkých homeomorfných kópií 2^ω v $\mathbb{R}$ a nech $\{x_\lambda : \lambda < \omega_C\}$ je dobré usporiadanie $\mathbb{R}$. Skonštruujeme množiny B_λ a hodnoty $a_\beta, b_\beta \in \mathbb{R}$ spĺňajúce:

- mohutnosť B_λ je menej ako kontinuum;
- B_λ má vlastnosť (P);
- pre $\alpha < \lambda$ je $B_\alpha \subset B_\lambda$ a x_α môžeme vyjadriť ako súčet dvoch prvkov z B_λ;
- $a_\beta \in C_\beta \cap \bigcup_{\alpha<\omega_C} B_\alpha$ a $b_\beta \in C_\beta \setminus \bigcup_{\alpha<\omega_C} B_\alpha$.

Zvoľme $a_0 \in C_0$ a $b_0 \in C_0 \setminus \{a_0, x_0 - a_0\}$. Položme $B_0 := \{a_0, x_0 - a_0\}$. Ak máme B_α pre každé $\alpha < \lambda$ a a_γ, b_γ pre každé $\gamma < \beta$, kde $\beta \leq \lambda$ tak položíme $B'_\lambda := \bigcup_{\alpha<\lambda} B_\alpha$ a ak $x_\lambda \in B'_\lambda + B'_\lambda$, tak $B_\lambda := B'_\lambda$ a pokračujeme na ďalšiu λ pričom hodnoty a_β, b_β zatiaľ nedefinujeme. Ak $x_\lambda \notin B'_\lambda + B'_\lambda$ tak analogicky ako v dôkaze lemy 3 ukážeme, že existuje $a_\beta \in C_\beta$ také, že $B_\lambda := B'_\lambda \cup \{a_\beta, x_\lambda - a_\beta\}$ má vlastnosť (P). Keďže $\{b_\gamma : \gamma < \beta\}$ má mohutnosť menšiu ako kontinuum, môžeme vybrať a_β tak, aby sme túto množinu nepretli množinou B_λ. Keďže množina B_λ má mohutnosť menšiu ako kontinuum, nájdeme $b_\beta \in C_\beta$ ktoré do nej nepatrí.

Ešte potrebujeme ukázať, že sme definovali a_β, b_β pre všetky $\beta < \omega_C$. To ale dostávame z toho, že B je množina mohutnosti kontinua (inak by nemohla mať vlastnosť (N)) a teda prípad $x_\lambda \notin B'_\lambda + B'_\lambda$ nastáva pre kontinuum veľa $\lambda < \omega_C$. A teda sme definovali kontinuum veľa hodnôt a_β, b_β.

Konečne, keďže $b_\beta \notin B$ pre každé β, B nemôže obsahovať homeomorfnú kópiu 2^ω a teda nieje analytická. Keďže pre každé β je $a_\beta \in B$ nieje analytický ani doplnok B a teda B nieje koanalytická. $\square$

Kapitola 2

Merateľnosť a Bairova vlastnosť

Často používaná metóda na ukázanie neborelovskosti množiny je ukázať, že nemôže byť merateľná prípadne, že existuje spojité zobrazenie a nemerateľná množina ktorá je obrazom množiny, ktorej borelovskosť chceme vyvrátiť. Oba tieto prístupy vychádzajú z univerzálnej merateľnosti analytických množín. Pekným príkladom na ilustráciu tohoto postupu je tzv. Hamelova báza, teda algebraická báza $\mathbb{R}$ ako vektorového priestoru nad telesom racionálnych čísel. Že takáto báza existuje dostaneme zo známeho tvrdenia z algebry, ktoré hovorí, že za predpokladu axiómy výberu má každý netriviálny vektorový priestor má algebraickú bázu.

Veta 6. *Neexistuje analytická Hamelova báza.*

Dôkaz. Nech $H \subset \mathbb{R}$ je analytická Hamelova báza. Zvoľme $x \in H$ a označme $\widetilde{H} = H\setminus\{x\}$. Definujme

$$K_n := \bigcup_{\mathbf{q}\in\mathbb{Q}^n} \left\{ q_1x_1 + \cdots + q_nx_n : x_1, \ldots, x_n \in \widetilde{H}, (q_1, \ldots, q_n) = \mathbf{q} \right\}$$

a $K := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Zobrazenie $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n q_ix_i$ je pre dané $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{Q}^n$ spojité (dokonca lipschitzovské) a všetky zjednotenia sú spočetné, takže množina K je analytická a teda lebesgueovsky merateľná. Zjavne množina K je práve množina všetkých lineárnych kombinácií prvkov množiny $\widetilde{H}$. Keďže H je báza priestoru $\mathbb{R}$, dostávame $\mathbb{R} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} qx + K$ pričom množiny v zjednotení sú po dvoch disjunktné. Odtiaľ, keďže Lebesgueova miera je translačne invariantná a spočetne aditívna je K množina nenulovej miery.

Nech $\lambda(K \cap [a, b]) = \delta > 0$ pre nejaký interval. Nech $x > 0$ potom pre $q \in \left[0, \frac{b-a}{x}\right] \cap \mathbb{Q}$ je miera množiny $(qx + K) \cap [a, 2b - a]$ aspoň δ, pretože táto množina obsahuje posunutie $[a, b] \cap K$. Keďže množiny $qx + K$ sú po dvoch disjunktné, máme

$$2(b - a) = \lambda([a, 2b - a]) \geq \sum_{q\in\left[0, \frac{b-a}{x}\right]\cap\mathbb{Q}} \lambda((qx + K) \cap [a, 2b - a]) = \infty$$

čo je spor. Takže množina K nemôže mať nenulovú mieru.

Ukázali sme, že množina K nieje lebesgueovsky merateľná, čo je spor s tým, že je analytická. Teda množina H nemôže byť analytická. □

Veta 7. *Existuje riedka Hamelova báza nulovej Lebesgueovej miery.*

Dôkaz. Ukážeme, že z množiny $C = \left\{\sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{a_i}{3^i} : (a_i) \in \{0,2\}^{\mathbb{N}}\right\}$ môžeme vybrať Hamelovu bázu. K tomu nám stačí ukázať, že C generuje $\mathbb{R}$ a na to nám stačí ukázať, že $C + C \supset [0,1]$.

Najskôr zavedieme značenie. Pre $s \in \{0,2\}^{<\omega}$ označme $K_s := \left[0, \frac{1}{3^{|s|}}\right] + \sum_{i=1}^{|s|} \frac{s_i}{3^i}$ (súčet prázdnej sumy definujeme ako 0). Označme $C_n = \bigcup_{s\in\{0,2\}^n} K_s$, potom $C = \bigcap_n C_n$.

Nech máme dané $x \in [0,1]$. Zrejme $x \in C + C$, ak pre každé $n \in \omega$ existujú $s, t \in \{0,2\}^n$ také, že priamka $p_x := \{(u,v) \in \mathbb{R} : u + v = x\}$ pretína štvorec $K_s \times K_t$. Postupujme indukciou podľa $n \in \omega$. Keďže $K_\emptyset = [0,1]$, tak priamka p_x pretne $K_\emptyset \times K_\emptyset$ aspoň v bode $(x,0)$ a teda tvrdenie je pre $n = 0$ dokázané.

Nech $n \geq 1$ a tvrdenie platí pre $n-1$. Z indukčného predpokladu nájdeme $s, t \in \{0,2\}^{n-1}$ také, že p_x pretína štvorec $K_s \times K_t$. Zjavne priamka p_x musí pretínať niektorú zo strán tohoto štvorca. Keďže štvorce $K_{s^\frown 0} \times K_{t^\frown 0}$, $K_{s^\frown 0} \times K_{t^\frown 2}$, $K_{s^\frown 2} \times K_{t^\frown 0}$ a $K_{s^\frown 2} \times K_{t^\frown 2}$ pokrývajú ľavú aj pravú tretinu každej strany štvorca $K_s \times K_t$, ak bod prieniku p_x a hrany štvorca padne sem, tak tvrdenie, ktoré dokazujeme platí pre n.

Ak p_x pretína štvorec $K_s \times K_t$ v prostrednej tretine niektorej strany. Označme si túto úsečku ako U. Potom U je stranou práve jedného štvorca, ktorý je podmnožinou $K_s \times K_t$, označme ho S. Zrejme steny štvorca S, ktoré sú kolmé na U, sú zároveň stenami niektorého zo štvorcov $K_{s^\frown 0} \times K_{t^\frown 0}$, $K_{s^\frown 0} \times K_{t^\frown 2}$, $K_{s^\frown 2} \times K_{t^\frown 0}$ a $K_{s^\frown 2} \times K_{t^\frown 2}$. Keďže smernica priamky p_x je -1 a priamka pretína stranu U, tak p_x musí pretínať aj jedu z týchto strán kolmých na U. Takže aj v tomto prípade je splnené dokazované tvrdenie pre n. Týmto sme ukázali indukčný krok a dôkaz je ukončený. □

2.1 Lebesgueova miera a Bairova vlastnosť

Veta 8. *Ak množina B má vlastnosť (P) a Bairovu vlastnosť, tak je prvej kategórie.*

Dôkaz. Nech B nieje prvej kategórie, potom nájdeme $G \subset B$ typu G_δ, ktorá nieje prvej kategórie. Existuje interval $I \subset \mathbb{R}$, že $G \cap I$ je hustá v I (ak by takýto interval neexistoval, tak $\bigcup\{I : G \cap I = \emptyset\}$ je hustá, otvorená množina nepretínajúca G, teda G by bola riedka). Zvoľme $x_1, x_2 \in G \cap I$. Potom $x_1 + I \cap x_2 + I \neq \emptyset$ a $x_1 + G, x_2 + G$ sú disjunktné, husté G_δ podmnožiny tohoto prieniku, čím dostávame spor s Bairovov vetou. □

Veta 9. *Množina s vlastnosťami (P) a (N) nieje typu F_σ.*

Dôkaz. Nech B je F_σ. Potom B je K_σ. Nech $B = \bigcup K_n$ kde K_n je rastúca postupnosť kompaktov. Existuje $n \in \mathbb{N}$ také, že množina $S_n := \{x + y : x, y \in K_n\}$ nieje prvej kategórie (keďže K_n tvoria rastúcu postupnosť, aj množiny S_n tvoria rastúcu postupnosť a $\bigcup S_n = \mathbb{R}$). Množina K_n je prvej kategórie a teda je nuladimenzionálna. Množina $K := (K_n \times K_n) \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\}$ je kompaktná a zobrazenie $(x,y) \mapsto x + y$ je na tejto množine spojité, prosté a na množinu S_n, čiže ide o homeomorfizmus týchto priestorov. Keďže K_n je nuladimenzionálna, je aj množina K

nuladimenzionálna a teda aj množina S_n je nuladimenzionálna. Takže S_n je nuladimenzionálny kompakt a teda ide o riedku množinu, čo je spor s voľbou n. $\square$

Veta 10. *Ak B je lebesgueovsky merateľná množina s vlastnosťou (P), tak má nulovú mieru.*

Dôkaz. Nech B má kladnú Lebesgueovu mieru. Potom nájdeme interval $[a, b]$ tak, že $\lambda(B \cap [a, b]) = \delta > 0$. Keďže B má kladnú mieru, je nespočetná a teda nájdeme prostú konvergentnú postupnosť $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, že $x_n \in B$. Označme jej limitu x a predpokladajme, že $|x_n - x| \leq 1$. Pre $n, m \in \mathbb{N}$ rôzne, je $(x_n + B) \cap (x_m + B)$ najviac jednoprvková a teda množiny

$$\tilde{B}_n := (x_n + B) \setminus \bigcup_{m<n} (x_m + B)$$

sú po dvoch disjunktné a od $x_n + B$ sa líšia len o množinu nulovej miery. Potom platí:

$$\tilde{B}_n \cap (x_n + [a, b]) \subset [(x - 1) + a, (x + 1) + b]$$

a množiny $\tilde{B}_n \cap (x_n + [a, b])$ majú rovnakú mieru ako $B \cap [a, b]$. Potom ale dostávame:

$$\lambda([(x-1)+a, (x+1)+b]) = b - a + 2 \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda\left(\tilde{B}_n \cap (x_n + [a, b])\right) \geq \infty$$

čo je zjavne spor. $\square$

Veta 11. *Existuje riedka, lebesgueovsky merateľná množina s vlastnosťami (P) a (N).*

Dôkaz. Ukážeme, že množina $C+\mathbb{Z}$, kde $C = \left\{\sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{a_i}{3^i} : (a_i) \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}}\right\}$ je Cantorove diskontinuum a $\mathbb{Z}$ je množina celých čísel, spĺňa predpoklady lemy 3.

Z dôkazu vety 7 vieme, že $C + C \supset [0, 1]$ a teda pre $x \in \mathbb{R}$ nájdeme $m \in \mathbb{Z}$ a $y, z \in\in C$ také, že $m + y + z = x$. Potom pre každé $n \in \mathbb{Z}$ sú $y + m + n$ a $z - n$ v množine $C + \mathbb{Z}$ a ich súčet je x. Takže každé $x \in \mathbb{R}$ sa dá dostať nekonečne veľa spôsobmi ako súčet dvoch prvkov z $C + \mathbb{Z}$.

Zostáva overiť, že $S_x := \{a \in (C + \mathbb{Z}) : x - a \in (C + \mathbb{Z})\}$ má až na spočetne veľa $x \in \mathbb{R}$ mohutnosť kontinuum. Ukážeme, že ak $x = m + \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{a_i}{3^i}$, kde $m \in \mathbb{Z}$, $(a_i) \in \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$ a pre každé $i \in \mathbb{N}$ existuje $n \geq i$ také, že $a_n \neq 1$, tak S_x obsahuje homeomorfnú kópiu C a teda má mohutnosť kontinuum. Nech máme takéto $x \in \mathbb{R}$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $x \in [0, 1]$, pretože $S_{x+m} = S_x$.

Najskôr zavedieme značenie. Pre $s \in \{0, 2\}^{<\omega}$ označme $K_s := \left[0, \frac{1}{3^{|s|}}\right] + \sum_{i=1}^{|s|} \frac{s_i}{3^i}$ (súčet prázdnej sumy definujeme ako 0). Pre $n \in \mathbb{N}$ označme $C_n = \bigcup_{s\in\{0,2\}^n} K_s$, potom $C = \bigcap_n C_n$. Ďalej pre $s, t \in \{0, 2\}^n$ označme vrcholy štvorca $K_s \times K_t$ nasledovne:

$$A^1_{s,t} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{3^i}, \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i}{3^i}\right),$$

$$
\begin{aligned}
A^2_{s,t} &= \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{s_i}{3^i}+\frac{1}{3^n},\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i}{3^i}\right),\\
A^3_{s,t} &= \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{s_i}{3^i}+\frac{1}{3^n},\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i}{3^i}+\frac{1}{3^n}\right)\\
A^4_{s,t} &= \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{s_i}{3^i},\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i}{3^i}+\frac{1}{3^n}\right)
\end{aligned}
$$

Pre $a \in \mathbb{R}$ nech $p_a := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y=a\}$. Pre $n\in\mathbb{N}$ označme $S_n^1 = \{K_s\times K_t : s,t\in\{0,2\}^n\}$ a $S_n^2 = \{(K_s-1)\times K_t : s,t\in\{0,2\}^n\}$, množiny $K_s\times K_t$ a $(K_s-1)\times K_t$ budeme pre zjednodušenie značiť (s,t) všade, kde toto značenie zrejmé ktorú z množín máme na mysli.

Tvrdíme, že požadovaný výsledok dostaneme z následujúceho tvrdenia. Ak $x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}$ a pre nejaké $n\in\mathbb{N}$ je $a_n\neq 1$, tak existuje $j\in\{1,2\}$, že pre každý štvorec $(s,t)\in S_n^j$ platí: ak p_x pretína (s,t), tak pretína aj $(s\hat{}0,t\hat{}2),(s\hat{}2,t\hat{}0)\in S_{n+1}^j$.

Nech toto tvrdenie platí, nech $x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}$ a $a_n\neq 1$ pre nekonečne veľa $n\in\mathbb{N}$. Označme n_k rastúcu postupnosť prirodzených čísel takých, že pre každé $k\in\mathbb{N}$ je $a_{n_k}\neq 1$. Pre každé k nájdeme $j_k\in\{1,2\}$ z tvrdenia pre n_k. Zjavne j_k musí nadobúdať jednu z hodnôt $\{1,2\}$ nekonečne veľa krát, a teda nájdeme vybranú podpostupnosť $(n_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$ takú, že j_{k_i} je konštantná. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že j_k už sú konštantné (inak prejdeme k tejto vybranej podpostupnosti).

Označme $P_n = p_x\cap\bigcup S_n^j$ a $P=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}P_n$. Tvrdíme, že P je kompaktnou podmnožinou $p_x\cap((C+\mathbb{Z})\times(C+\mathbb{Z}))$ bez izolovaných bodov, a teda má mohutnosť kontinua. Zjavne $\bigcup S_n^j$ sú kompaktné, do seba zaradené množiny a p_x je uzavretá, teda P_n tvorí klesajúcu postupnosť kompaktov a teda P je neprázdny kompakt. Inklúzia je zrejmá z definície P_n. Zostáva ukázať, že P nemá izolované body.

Nech z je izolovaný bod P. Nájdeme $\delta>0$ také, že $B(z,\delta)\cap P=\{z\}$. Nájdeme postupnosť štvorcov $(s_n,t_n)\in S_n^j$ takú, že $z\in(s_n,t_n)$, ide o postupnosť do seba zaradených množín s klesajúcim priemerom a teda nájdeme $k\in\mathbb{N}$ také, že $(s_{n_k},t_{n_k})\subset B(z,\delta)$. Z tvrdenia dostávame, že p_x má neprázdny prienik so štvorcami $(s_{n_k}\hat{}0,t_{n_k}\hat{}2)$ a $(s_{n_k}\hat{}2,t_{n_k}\hat{}0)$. Z dôkazu vety 7 vieme, že ak p_x pretína nejaký štvorec (s,t), tak $p_x\cap(s,t)\cap((C+\mathbb{Z})\times(C+\mathbb{Z}))\neq\emptyset$. Keďže nájdené štvorce z $S_{n_k+1}^j$ sú disjunktné, je $P\cap B(z,\delta)\supset P\cap((s_{n_k}\hat{}0,t_{n_k}\hat{}2)\cup(s_{n_k}\hat{}2,t_{n_k}\hat{}0))$ aspoň dvojprvková, čo je spor s voľbou δ.

Takže zostáva dokázať tvrdenie. Nech máme $x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}$ a $n\in\mathbb{N}$ také, že $a_n\neq 1$. Z konštrukcie štvorcov je zrejmé, že p_x pretína $(s\hat{}0,t\hat{}2),(s\hat{}2,t\hat{}0)\in S_{n+1}^j$ ak vzdialenosť p_x od tej diagonály štvorca (s,t) s ktorou je rovnobežná, je menej ako $\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{3^n}$. Keďže $a_n\neq 1$, existuje $s\in\{0,1,2\}^{n-1}$ také, že $\left|x-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{s_i}{3^i}\right|<\frac{1}{3^n}$. Označme $d:=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{s_i}{3^i}$. Vzdialenosť p_x a p_d je zjavne menšia ako $\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{3^n}$. Stačí teda ukázať, že p_d buď pretne štvorce v S_n^1 v diagonále, alebo v diagonále pretne štvorce v S_n^2.

Zrejme ak priamka p_d prechádza nejakým z týchto štvorcov, tak prechádza jeho vrcholom.

Najskôr ukážeme, že ak p_d pretne nejaký štvorec v S_n^j v diagonále tak všetky štvorce ktoré v S_n^j pretne, pretne v diagonále. Nech toto neplatí, nech napríklad existujú $s, s', t, t' \in \{0,2\}^{n-1}$ také, že p_d prechádza bodmi $A^2_{s,t}$ a $A^1_{s',t'}$. Potom, keďže p_d je priamka s rovnakými súčtami, platí:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1} \frac{s_i + t_i}{3^i} &= \frac{1}{3^{n-1}} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{s'_i + t'_i}{3^i} \\
\sum_{i=1}^{n-1} \frac{s_i - s'_i + t_i - t'_i}{3^i} &= \frac{1}{3^{n-1}} \\
\sum_{i=1}^{n-1} 3^{n-1-i} \left(s_i - s'_i + t_i - t'_i\right) &= 1
\end{aligned}$$

a keďže číslo v zátvorke je párne, dostávame spor. Analogicky tvrdenie ukážeme aj v prípade, že p_d prechádza bodom $A^3_{s',t'}$.

Zostáva ukázať, že ak p_d prechádza vrcholom štvorca v S^1_n, tak buď je diagonálou tohoto štvorca, alebo existuje štvorec v S^2_n ktorého je p_d diagonálou. Nech máme $s, s', t, t' \in \{0,2\}^{n-1}$. Nech p je priamka prechádzajúca jedným z bodov $A^1_{s,t}$, $A^3_{s,t}$ a jedným z bodov $A^1_{s',t'} - (1,0)$, $A^3_{s',t'} - (1,0)$ potom p_d má smernicu -1, Teda platí:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1} \frac{s_i - s'_i}{3^i} - 1 + \frac{c}{3^n} &= -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{t_i - t'_i}{3^i} - \frac{c}{3^{n-1}} \\
\sum_{i=1}^{n-1} \frac{s_i - s'_i + t_i - t'_i}{3^i} &= 1 - \frac{2c}{3^{n-1}} \\
\sum_{i=1}^{n-1} 3^{n-1-i} \left(s_i - s'_i + t_i - t'_i\right) &= 3^{n-1} - 2c,
\end{aligned}$$

kde $c \in \{-1, 0, 1\}$ závisí na tom o ktoré vrcholy sa jedná. Číslo na pravej strane rovnosti je zjavne nepárne, číslo na ľavej strane je párne a teda dostávame spor. Takže p_d nemôže pretínať štvorce v S^1_n iba vo vrcholoch a zároveň pretínať iba vo vrcholoch štvorce v S^2_n. Týmto je veta dokázaná. □

2.2 σ-pórovitosť

σ-pórovitosť je pojem používaný ku štúdiu "deravých" množín, ktoré sa objavujú pri štúdiu problémov z teórie diferenciácie. Pojem bol zavedený v Dolzhenko (1967). Z článku Zajícek (1987) vieme, že σ-pórovité množiny sú zároveň nulovej Lebesgueovej miery a prvej kategórie. V predchádzajúcej časti sme ukázali, že borelovská množina s vlastnosťami (P) a (N) musí byť nulovej Lebesgueovej miery a prvej kategórie. Je teda prirodzené sa pýtať či takáto množina musí byť aj σ-pórovitá respektíve či táto množina môže byť σ-pórovitá.

Definícia. Nech (X, d) je úplný metrický priestor, $E \subset X$, $x \in E$ a $R > 0$. Definujeme

$$l(x, E, R) := \sup\left\{r > 0 : \exists y \in X : B_r(y) \subset B_R(x) \setminus M\right\},$$

$$p(x,E) := \limsup_{R\to 0_+} \frac{l(x,E,R)}{R} > 0.$$

Povieme, že E je pórovitá v bode x, ak $p(x,E) > 0$. Povieme, že E je pórovitá, ak je pórovitá v každom svojom bode. Povieme, že E je σ=pórovitá, ak existujú pórovité množiny $E_n \subset X$ také, že $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$.

Tvrdenie 12. *Existuje pórovitá množina s vlastnosťami (P) a (N).*

Dôkaz. Tvrdíme, že množina z vety 11 je pórovitá. K tomu nám stačí ukázať, že množina $C+\mathbb{Z}$ je pórovitá. Teda pre každé $x \in C+\mathbb{Z}$ chceme nájsť postupnosť R_n klesajúcu k 0 a kladnú konštantu p tak, že $l(x, C+\mathbb{Z}, R_n) \geq R_n p$.

Nech najskôr máme $x \in \mathbb{Z}$. Pre $n \in \mathbb{N}$ položme $R_n = 2\cdot 3^{-n}$. Z konštrukcie potom máme $(x + (3^{-n}, 2\cdot 3^{-n})) \cap C+\mathbb{Z} = \emptyset$ a teda $l(x, C+\mathbb{Z}, R_n) \geq \frac{1}{2}3^{-n} = \frac{1}{4}R_n$.

Nech teraz máme $x \in (C+\mathbb{Z}) \setminus \mathbb{Z}$. Pre $n \in \mathbb{N}$ zvoľme $R_n = \frac{1}{2}\cdot 3^{-n+1}$. Pre dostatočne veľké n bude $R_n < \operatorname{dist}(x, C+\mathbb{Z})$. Pre takéto n nájdeme interval dĺžky 3^{-n} v $(x-R_n, x+R_n) \setminus (C+\mathbb{Z})$. Takže $l(x, C+\mathbb{Z}, R_n) \geq \frac{1}{2}3^{-n} = \frac{1}{3}R_n$. Takže množina $C+\mathbb{Z}$ je pórovitá. $\square$

Posledné tvrdenie v tejto časti je dokázané v článku Zelený a Pelant (2004) a ukazuje, že vlastnosť (P) nezaručuje, že množina bude σ-pórovitá. Dôkaz tvrdenia je ale pridlhý nato aby sme ho tu predviedli.

Tvrdenie. *Existuje kompaktná množina s vlastnosťou (P), ktorá nieje σ-pórovitá.*

Kapitola 3

Hausorffova miera a dimenzia, packing miera a dimenzia

V predchádzajúcej kapitole sme ukázali, že každá merateľná množina s vlastnosťou (P) musí mať nulovú Lebesgueovu mieru a zároveň sme ukázali, že existujú množiny nulovej miery s vlastnosťou (N). Takže ak chceme študovať vlastnosti množín s vlastnosťami (P) a (N) z pohľadu miery, potrebujeme použiť také miery, ktoré rozlišujú Lebesgueovsky nulové množiny. Asi najčastejšie používaným príkladom takejto miery je Hausdorffova miera a ďalším dôležitým príkladom je packing miera. V tejto kapitole budeme študovať množiny s vlastnosťami (P) a (N) práve z pohľadu týchto mier a hlavne z pohľadu im príslušných dimenzií.

Následujúce tvrdenia ohľadom základných vlastností týchto mier a dimenzií nebudeme dokazovať. V názve každého tvrdenia je odkaz na literatúru, kde je tvrdenie dokázané.

Definícia. Pre $A \subset \mathbb{R}^n$, $0 \leq s < \infty$ a $0 < \delta \leq \infty$ definujeme:

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) := \inf\left\{\sum_{i\in\mathbb{N}} (\operatorname{diam} A_i)^s : A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i, \operatorname{diam} A_i \leq \delta\right\}$$

a

$$\mathcal{H}^s(A) := \lim_{\delta\to 0_+} \mathcal{H}^s_\delta(A) = \sup \mathcal{H}^s_\delta(A).$$

Zobrazenie $\mathcal{H}^s$ nazývame s-dimenzionálnou Hausdorffovou vonkajšou mierou. Ak množinovú funkciu $\mathcal{H}^s$ obmedzíme na $\mathcal{H}^s$-merateľné množiny, dostávame s-dimenzionálnu Hausdorffovu mieru, ktorú budeme tiež značiť $\mathcal{H}^s$.

Lema (Falconer(1990, 3.2))**.** *Nech* $0 \leq s \leq \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$ *a* $0 < t < \infty$, *platí:*

$$\mathcal{H}^s(A + a) = \mathcal{H}^s(A)$$
$$\mathcal{H}^s(tA) = t^s\mathcal{H}^s(A).$$

Poznámka (Mattila(1995, 4.4)). Ak v definícii budeme namiesto pokrytia akýmikoľvek množinami uvažovať len pokrytia uzavretými, otvorenými alebo konvexnými množinami dostaneme rovnakú vonkajšiu mieru.

Poznámka (Mattila(1995, 4.5)). $\mathcal{H}^s$ je regulárna borelovská miera.Mattila (1995)

Tvrdenie (Mattila(1995, 4.7)). *Pre $0 \leq s < t < \infty$ a $A \subset \mathbb{R}^n$ platí:*

1. *Ak $\mathcal{H}^s(A) < \infty$, tak $\mathcal{H}^t(A) = 0$;*
2. *Ak $\mathcal{H}^t(A) > 0$, tak $\mathcal{H}^s(A) = \infty$.*

Definícia. Hausdorffovu dimenziu množiny $A \subset \mathbb{R}^n$ definujeme ako

$$\begin{aligned} \dim A &= \sup\{s : \mathcal{H}^s(A) > 0\} = \sup\{s : \mathcal{H}^s(A) = \infty\} \\ &= \inf\{s : \mathcal{H}^s(A) < \infty\} = \inf\{s : \mathcal{H}^s(A) = 0\}. \end{aligned}$$

Definícia. Nech $A \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdna obmedzená množina. Pre $0 < \varepsilon < \infty$ definujeme $N(A, \varepsilon)$ ako najmenší počet gulí o polomere ε pokrývajúcich A, t.j.

$$N(A, \varepsilon) := \min\left\{k : \exists x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n\ A \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, \varepsilon)\right\}.$$

Ďalej definujeme hornú a dolnú Minkowského dimenziu množiny A ako

$$\overline{\dim}_M A = \inf\left\{s \in [0, \infty] : \limsup_{\varepsilon \to 0_+} N(A, \varepsilon)\, \varepsilon^s = 0\right\}$$

a

$$\underline{\dim}_M A = \inf\left\{s \in [0, \infty] : \liminf_{\varepsilon \to 0_+} N(A, \varepsilon)\, \varepsilon^s = 0\right\}.$$

Poznámka. Z definície je zrejmé, že $\dim_H A \leq \underline{\dim}_M A \leq \overline{\dim}_M A \leq n$.

Tvrdenie (Falconer(1990, strana 27 a 30)). *Nech $A \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdna, obmedzená množina. Potom platí:*

$$\begin{aligned} \overline{\dim}_M A &= \limsup_{\varepsilon \to 0_+} \frac{\ln N(A, \varepsilon)}{-\ln \varepsilon}, \\ \underline{\dim}_M A &= \liminf_{\varepsilon \to 0_+} \frac{\ln N(A, \varepsilon)}{-\ln \varepsilon}. \end{aligned}$$

Navyše rovnosti platia aj v prípade, že $N(A, \varepsilon)$ nahradíme $P(A, \varepsilon)$, kde

$$P(A, \varepsilon) = \max\{k : \exists x_1, \ldots, x_k \in A\ B(x_i, \varepsilon) \cap B(x_j, \varepsilon) = \emptyset \text{ ak } i \neq j\},$$

Nech $\tilde{N}(A, m)$ je počet dyadických kociek o strane dĺžky 2^{-m}, ktoré pretnú A. Potom

$$\overline{\dim}_M A = \limsup_{m \to \infty} \frac{\ln \tilde{N}(A, m)}{m \ln 2},$$

a

$$\underline{\dim}_M A = \liminf_{m \to \infty} \frac{\ln \tilde{N}(A, m)}{m \ln 2}.$$

Definícia. Nech $A \subset \mathbb{R}^n$, (hornú) packing dimenziu množiny A definujeme ako

$$\dim_P A = \inf \left\{ \sup_{i \in \mathbb{N}} \overline{\dim}_M A_i : A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i,\ A_i \text{ sú obmedzené} \right\}.$$

Poznámka. Pre $A \subset \mathbb{R}^n$ platí: $\dim_P A \leq \overline{\dim}_M A$, keďže A je jedno z pokrytí cez ktoré robíme infímum.

Definícia. Nech $0 \leq s < \infty$. Pre $A \subset \mathbb{R}^n$ a $0 < \delta < \infty$ definujeme

$$\begin{aligned} P^s_\delta (A) &:= \sup \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} (2r_i)^s : B(x_i, r_i) \cap B(x_j, r_j) = \emptyset, i \neq j; x_i \in A; r_i \leq \delta \right\}, \\ P^s (A) &:= \lim_{\delta \to 0_+} P^s_\delta (A) = \inf_{\delta > 0} P^s_\delta (A). \end{aligned}$$

Konečne, definujeme s-dimenzionálnu vonkajšiu packing mieru množiny A ako

$$\mathcal{P}^s (A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} P^s (A_i) : A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\}.$$

Potom $\mathcal{P}^s$ dáva regulárnu borelovskú mieru na $\mathbb{R}^n$.

Tvrdenie (Mattila(1995, 5.11))**.** *Pre $A \subset \mathbb{R}^n$ platí:*

$$\begin{aligned} \dim_P A &= \inf \{ s : \mathcal{P}^s (A) = 0 \} = \inf \{ s : \mathcal{P}^s (A) < \infty \} \\ &= \sup \{ s : \mathcal{P}^s (A) > 0 \} = \sup \{ s : \mathcal{P}^s (A) = \infty \}. \end{aligned}$$

Tvrdenie (Mattila(1995, 5.12))**.** *Pre $A \subset \mathbb{R}^n$ platí $\mathcal{H}^s (A) \leq \mathcal{P}^s (A)$.*

Tvrdenie (Falconer(1990, 3.1))**.** *Nech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je lipschitzovská a $A \subset \mathbb{R}^n$. Potom $\dim_H f[A] \leq \dim_H A$.*

Tvrdenie (Mattila(1995, 8.10))**.** *Nech $A \subset \mathbb{R}^n$ a $B \subset \mathbb{R}^m$ sú neprázdne borelovské množiny. Potom platí:*

$$\dim_H A + \dim_H B \leq \dim_H (A \times B) \leq \dim_H A + \dim_P B \leq \dim_P A + \dim_P B.$$

Lema 13. *Ak borelovská množina $E \subset \mathbb{R}$ spĺňa $E + E = \mathbb{R}$, potom $\dim_P E \geq \frac{1}{2}$.*

Dôkaz. Keďže $E + E = f[E \times E]$, kde $f(x, y) = x + y$ je zjavne lipschitzovské, dostávame $\dim_H E \times E \geq \dim_H f[E \times E] = \dim_H \mathbb{R} = 1$. Podľa predošlého tvrdenia teda $2 \dim_P E \geq \dim_H E \times E \geq 1$. Tým je lema dokázaná. □

Nasledujúci príklad využíva myšlienku z Falconer (1990, príklad 7.8) a naznačuje, že dolné odhady na dimenziu sa nemusia dať vylepšiť.

Tvrdenie 14. *Existujú kompaktné množiny $E, F \subset \mathbb{R}$ také, že $E + E = \mathbb{R} = F + F$, $\dim_H E = 0$ a $\dim_P F = \frac{1}{2}$.*

Dôkaz. Nech $m_0 = 0$ a m_k je rastúca postupnosť prirodzených čísel. Nech množina A obsahuje práve tie čísla z $[0,1]$, ktoré majú nulu na r-tom mieste dvojkového rozvoja, ak $m_k + 1 \le r \le m_{k+1}$ kde k je párne číslo. Nech množina B obsahuje práve tie čísla z $[0,1]$, ktoré majú nulu na r-tom mieste dvojkového rozvoja, ak $m_k + 1 \le r \le m_{k+1}$ kde k je nepárne číslo.

Z voľby A a B je zjavné, že pre $x \in [0,1]$ existuje $a \in A$ a $b \in B$také, že $a+b = x$ (stačí voliť podľa dvojkového rozvoja x). Odtiaľ $(\mathbb{N} + (A \cup B)) + (\mathbb{N} + (A \cup B)) = \mathbb{R}$. Zostáva zvoliť m_k tak, aby boli splnené požiadavky na dimenziu.

Zjavne pre párne k môžeme množinu A pokryť 2^{j_k} intervalmi dĺžky $2^{-m_{k+1}}$, kde $j_k = (m_2 - m_1) + (m_4 - m_3) + \cdots + (m_k - m_{k-1})$. Nech $m_k = 2^{2^k}$, potom

$$\dim_H A \le \underline{\dim}_M A \le \lim_{k\to\infty} \frac{j_k}{m_{k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{2^{2^k} - 2^{2^{k-1}} + \cdots + 2^{2^2} - 2^{2^1}}{2^{2^{k+1}}} = 0.$$

Takže $\dim_H A = 0$. Analogicky dostávame, že $\dim_H B = 0$ a teda $E := \mathbb{N} + (A \cup B)$ je hľadaná množina.

Nech teraz $m_k = k$. Nech máme dané $n \in \mathbb{N}$. Potom množina A je pokrytá 2^{j_n} dyadickými intervalmi dĺžky $2^{-(n+1)}$, ak n je párne a $2^{j_{n-1}}$ dyadickými intervalmi dĺžky $2^{-(n+1)}$, ak n je nepárne. Odtiaľ

$$\dim_P A \le \overline{\dim}_M A = \limsup \frac{n/2}{n+1} = \frac{1}{2}.$$

Takže $F := \mathbb{N} + (A \cup B)$ je druhá hľadaná množina. $\square$

Nasledujúci príklad z Keleti (1999) ukazuje, že borelovské množiny s vlastnosťou (P) môžu mať dimenziu 1

Tvrdenie 15. *Existuje kompaktná množina $A \subset \mathbb{R}$ taká, že $\dim_H A = \dim_P A = 1$ a A má vlastnosť (P).*

Dôkaz. Nech $\delta_m = \frac{1}{6^{m-1} m!}$. Indukciou definujeme množiny A_m, disjunktné zjednotenia uzavretých intervalov $[n_{i_1,\dots,i_m}\delta_m, (n_{i_1,\dots,i_m} + 1)\,\delta_m]$, kde $1 \le i_k \le k$, $1 \le k \le m$. Intervaly v A_m označíme $I_1^m, I_2^m, \dots, I_{m!}^m$ a postupnosť intervalov $(I_1^1, I_1^2, I_2^2, I_1^3, \dots)$ označíme $(J_1, J_2, \dots)$.

Položme $n_1 = 0$ potom definujeme $A_1 = I_1^1 = J_1 = [0,1]$. Nech máme skonštruované množiny $A_1, \dots, A_m$. Čísla $n_{i_1,\dots,i_{m+1}}$ definujeme z čísel $n_{i_1,\dots,i_m}$ následovne:

ak $n_{i_1,\dots,i_m}\delta_m \notin J_m$ tak položíme

$$n_{i_1,\dots,i_m,i} = 6\,(m+1)\,n_{i_1,\dots,i_m} + 6i - 6, \quad i = 1, \dots, m+1;$$

a ak $n_{i_1,\dots,i_m}\delta_m \in J_m$ tak položíme

$$n_{i_1,\dots,i_m,i} = 6\,(m+1)\,n_{i_1,\dots,i_m} + 6i - 3, \quad i = 1, \dots, m+1.$$

Potom pre $i = 1, \dots, m+1$ platí:

$$[n_{i_1,\dots,i_m,i}\delta_{m+1}, (n_{i_1,\dots,i_m,i} + 1)\,\delta_{m+1}] \subset [n_{i_1,\dots,i_m}\delta_m, (n_{i_1,\dots,i_m} + 1)\,\delta_m]$$

odkiaľ $A_{m+1} \subset A_m$.

Nech $A = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$. Že A má Hausdorffovu dimenziu 1 vyplýva z Falconer (1990, príklad 4.6). Takže stačí ukázať, že A má vlastnosť (P).

Nech $x_1 < x_2 \leq x_3 < x_4$ sú v A. Nájdeme m také, že $\delta_m < x_2 - x_1$. Potom ak $x_1 \in I_j^m = J_N$, tak žiaden z bodov x_2, x_3, x_4 v tomto intervale neleží, keďže interval J_N má dĺžku δ_m. Takže, keď sme definovali množinu A_{N+1}, použili sme druhú definíciu pri voľbe intervalu obsahujúceho x_1 a prvú definíciu pri voľbe intervalov obsahujúcich x_2, x_3 a x_4. Potom x_1 je tvaru $(6N_1 + 3)\,\delta_N + \varepsilon_1$ a x_2, x_3, x_4 sú tvaru $6N_j\delta_N + \varepsilon_j$, kde $N_1, \ldots, N_4$ sú prirodzené čísla a $0 \leq \varepsilon_j \leq \delta_m$ pre $j = 1, \ldots, 4$. Odtiaľ $x_2 - x_1 \neq x_4 - x_3$. Takže A má vlastnosť (P). $\square$

Kapitola 4

Selekcie

V tejto kapitole budeme študovať akým spôsobom sa dá rozhodnúť či daná množina môže mať borelovskú selekciu. V tejto kapitole pre kartézsky súčin $X \times Y$ bude P_X značiť projekciu na X-ovú súradnicu.

Definícia. Nech X, Y sú poľské priestory a $E \subset X \times Y$. Zobrazenie $f : P_X[E] \to Y$ nazývame *selekciou* množiny E, ak pre $x \in P_X[E]$ je $(x, f(x)) \in E$. Selekciu f nazývame matching ak je bijekciou $P_X[E]$ a $P_Y[E]$. Graf selekcie f nazývame *uniformizáciou* množiny E.

Z axiómy výberu dostávame, že selekcia vždy existuje. Matching samozrejme nemusí existovať, stačí uvažovať príklad kedy $P_X[E]$ a $P_Y[E]$ majú rôznu mohutnosť. Následujúci príklad ukazuje, že existencia borelovskej selekcie nieje zaručená ani pre uzavreté množiny.

Príklad 16. Existuje uzavretá podmnožina $\mathbb{R} \times \omega^\omega$ bez analytickej uniformizácie.

Dôkaz. Nájdeme $F \subset 2^\omega \times \omega^\omega$ uzavretú takú, že $A := P_{2^\omega}[F]$ je analytická a nieje borelovská.

Nech U je analytická uniformizácia F. Potom U je grafom zobrazenia $f : A \to \omega^\omega$, a podľa Kechris (1995, veta 14.12) U je borelovská množina v $A \times \omega^\omega$. Keďže $A \times \omega^\omega \supset F \supset U$ a F je uzavretá, je U borelovská v $2^\omega \times \omega^\omega$. Zobrazenie P_{2^ω} je spojitá bijekcia U na A a teda podľa Luzinovej-Suslinovej vety Kechris (1995, veta 15.1) je A borelovská množina. Toto je spor s voľbou F. □

Pre úplnosť spomeňme aj množiny, ktoré majú borelovskú uniformizáciu. Prvým príkladom sú borelovské množiny so všetkými rezmi veľkými (napr. kladnej miery alebo druhej kategórie), dôkaz tohto tvrdenia sa dá nájsť v Kechris (1995, veta 18.6). Druhým príkladom sú borelovské množiny so všetkými rezmi najviac spočetnými, dôkaz je v Kechris (1995, veta 18.10).

Uvažujme množinu B s vlastnosťami (P) a (N). Podľa 1 a 2 pretne každá priamka tvaru $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = z\}$ množinu $B \times B$ v najviac dvoch bodoch. Zjavne ak (x, y) je jedným takýmto bodom, tak (y, x) je druhým a teda ak sa obmedzíme na polrovinu $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x\}$, tak v každom z prienikov je práve jeden bod. Nech π je otočenie, ktoré z priamky $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = z\}$ urobí zvislú priamku. Potom množina $A := \pi\left[(B \times B) \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x\}\right]$ má v každom zvislom reze práve jeden bod. Teda ide o uniformizáciu a problém existencie borelovskej množiny s vlastnosťami (P) a (N) môžeme preformulovať na problém existencie uniformizácie s určitou vlastnosťou. Nasledujúci príklad z článku Laczkovich (1988) ukazuje, že takéto dodatočné vlastnosti môžu zabrániť existencii merateľnej uniformizácie (v tomto prípade ide o matching).

Najskôr potrebujeme definovať niekoľko pojmov ohľadom grafov.

Definícia. *Grafom* rozumieme usporiadanú dvojicu (V, E), kde V je množina *vrcholov* a E je množina dvojprvkových podmnožín V. Prvky E nazývame *hrany* grafu. Graf (V, E) nazývame *bipartitný*, ak existujú $V_1, V_2 \subset V$ také, že $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V_1 \cup V_2 = V$ a pre $x \in V_i$ platí: ak $\{x, y\} \in E$, tak $y \notin V_i$ t.j. vrcholy grafu môžeme rozdeliť na dve časti tak, že medzi žiadnymi dvoma vrcholmi v tej istej časti nieje hrana.

Definícia. Nech (V, E) je graf a $v \in V$. *Stupeň* vrcholu v definujeme ako počet hrán, ktoré tento vrchol obsahujú. Graf (V', E') nazveme *podgarfom* grafu (V, E), ak $V' \subset V$ a $E' \subset E$. Podgraf nazveme *faktorom*, ak $V' = V$. Podgraf grafu (V, E) nazveme *1-faktorom*, ak je faktorom a každý jeho vrchol má stupeň 1.

Definícia. *Cestou* v grafe nazveme prostú postupnosť vrcholov $(v_1, \ldots, v_n)$ takú, že pre $i < n$ je $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$. *Dĺžku cesty* definujeme ako počet jej vrcholov. Cestu nazveme *kružnicou*, ak platí: $\{v_1, v_n\} \in E$. Graf nazveme *súvislý*, ak medzi každými dvoma vrcholmi existuje cesta. *Súvislou komponentov* grafu príslušnú vrcholu v nazveme maximálny (vzhľadom k inklúzii E) súvislý podgraf. *Nekonečnou cestou* rozumieme súvislý graf taký, že V je nekonečná množina a každý vrchol má stupeň 2.

Definícia. Nech (X, μ) je priestor s mierou a f je zobrazenie na X zachovávajúce mieru. Povieme, že zobrazenie f je *ergodické*, ak pre každú merateľnú množinu $E \subset X$, ktorá je invariantná vzhľadom k f platí, že $\mu(E) = 0$ alebo $\mu(X \backslash E) = 0$.

Veta 17. *Nech I značí interval $[0, 1]$, $u \in I$ nech je iracionálne a nech $R \subset I \times I$ je obvod obdĺžnika s vrcholmi $A_0 = (1, 1-u)$, $A_1 = (1-u, 1)$, $A_2 = (0, u)$ a $A_3 = (u, 0)$. Potom R obsahuje matching, ale neobsahuje borelovský matching. Navyše, žiaden matching v R nieje merateľný vzhľadom k jednodimenzionálnej Hausdorffovej miere.*

Dôkaz. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $u < \frac{1}{2}$. Najskôr ukážeme, že R obsahuje matching. Definujeme bipartitný graf $\mathcal{G}$ následovne: nech I_1, I_2 sú disjunktné kópie I, položme $I_1 \cup I_2$ ako množinu vrcholov grafu $\mathcal{G}$. Množinu hrán $\mathcal{G}$ definujme následovne: $\{x, y\}$ je hranou $\mathcal{G}$ práve vtedy, keď $x \in I_1$, $y \in I_2$ a $(x, y) \in R$. Potom R obsahuje matching práve vtedy, keď $\mathcal{G}$ obsahuje 1-faktor a $\mathcal{G}$ obsahuje 1-faktor, ak každá súvislá komponenta $\mathcal{G}$ obsahuje 1-faktor.

Keďže každý vrchol $\mathcal{G}$ má stupeň najviac 2 (pre každé $x \in I$ existujú najviac dva $y \in I$ také, že $(x, y) \in R$ a pre každé y existujú najviac dve vhodné x) tak súvislými komponentami $\mathcal{G}$ sú len cesty a kružnice. Nekonečné cesty a cesty a kružnice párnej dĺžky majú 1-faktor. Keďže $\mathcal{G}$ je bipartitný, neobsahuje kružnice nepárnej dĺžky. Takže zostáva ukázať, že $\mathcal{G}$ nemá za komponentu cestu nepárnej dĺžky.

Nech toto nieje pravda, t.j. nech $(x_1, \ldots, x_n)$ je cesta nepárnej dĺžky. Potom x_1 a x_n patria oba do I_1 alebo I_2 a majú stupeň 1. Keďže jediné vrcholy so stupňom 1 sú 0 a 1 je buď $x_1 = 0$ a $x_n = 1$ alebo $x_1 = 1$ a $x_n = 0$.

Ak $(x, y) \in R$ patrí do úsečky spájajúcej A_0 a A_1, tak $y = -x + 2 - u$. Ak (x, y) patrí do nejakého zo zvyšných troch úsečiek, tak $y = \pm x \pm u$. Takže $x_2 = \pm x_1 \pm u + 2a_2$, kde $a_2 \in \{0, 1\}$. Indukciou dostávame, že $x_k = \pm x_1 + 2a_k + b_k u$, kde $k \geq 2$ a a_k a b_k sú celé čísla. Špeciálne $x_n = \pm x_1 + 2a_n + b_n u$ a teda $b_n u = x_n \pm x_1 - 2a_n = \pm 1 - 2a_n$ je nepárne celé číslo. Potom ale b_n nieje nula a teda $u = \frac{\pm 1 - 2a_n}{b_n}$ je racionálne číslo, čo je spor s predpokladom na u. Takže $\mathcal{G}$ neobsahuje maximálnu cestu nepárnej dĺžky a teda R obsahuje matching.

Teraz ukážeme, že R neobsahuje matching merateľný v jednodimenzionálnej Hausdorffovej miere λ_1. Nech μ je normovaná lineárna miera na H, t.j. $\mu(H) = \frac{\lambda_1(H)}{2\sqrt{2}}$ pre každú merateľnú množinu $H \subset R$. Definujeme dve zobrazenia, f a g, z R do R nasledujúcim spôsobom. Nech $f(A_0) = A_0$, $f(A_2) = A_2$. Ak $(x, y) \in R$ a $x \notin \{0, 1\}$, tak nájdeme jediné $z \neq y$ také, že $(x, z) \in R$. Definujeme $f((x, y)) = (x, z)$. Takže f je zobrazenie, ktoré „vymieňa“ body vertikálneho rezu množiny R. Analogicky definujeme g tak, aby „vymieňalo“ body horizontálneho rezu, t.j. $g(A_1) = A_1$, $g(A_3) = A_3$ a $g((x, y)) = (z, y)$, kde $(z, y) \in R$. Zjavne f, g sú homeomorfizmy R na R zachovávajúce mieru μ, $f^{-1} = f$ a $g^{-1} = g$.

Ukážeme, že zobrazenie $g \circ f$ je ergodické na R. Nech T je kružnica s Lebesgueovou mierou a $h : R \to T$ je mieru zachovávajúci homeomorfizmus R na T taký, že $h(A_0) = 0$, $h(A_1) = \frac{u}{2}$, $h(A_2) = \frac{1}{2}$ a $h(A_3) = \frac{1+u}{2}$. Nech $k := h \circ g \circ f \circ h^{-1}$, potom k je mieru zachovávajúci homeomorfizmus T na T. Takže $k(t) = t + c$ alebo $k(t) = -t + c$ kde $c \in T$ je konštanta. Z definície $k(0) = h(g(f(A_0))) = h(g(A_0))$, body $g(A_0)$ a A_0 sú v rovnakej vzdialenosti od bodu A_1 a teda aj body $h(g(A_0))$ a $h(A_0) = 0$ sú v rovnakej vzdialenosti od $h(A_1) = \frac{u}{2}$. Odtiaľ $k(0) = u$. Podobne ukážeme, že $k\left(1 - \frac{u}{2}\right) = h(g(A_1)) = \frac{u}{2}$ (tu použijeme, že $1 \equiv 0$ v T). Takže $k(t) = t + u$. Keďže u je iracionálne, je k ergodické na T podľa Halmos (1956, strana 26) a teda $g \circ f = h^{-1} \circ k \circ h$ je ergodické na R.

Nech H je merateľný matching v R. Potom $H \cap f[H]$ je konečná a $H \cup f[H] = R$. Teda $\mu(H) = \frac{1}{2}$. Zjavne $H \cap g[H]$ je konečná a $H \cup g[H] = R$ a teda symetrická diferencia H a $g \circ f[H]$ je konečná. Keďže $g \circ f$ je ergodické, máme $\mu(H) = 0$ alebo $\mu(H) = 1$ čo je zjavne spor. Týmto je dôkaz dokončený. □

Literatúra

DOLZHENKO, E. P. (1967). Boundary properties of arbitrary functions. *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya*, **31**(1), 3–14.

FALCONER, K. (1990). *Fractal geometry.* John Wiley & Sons, 1 edition. ISBN 9780471922872.

HALMOS, P. (1956). *Lectures on Ergodic Theory.* AMS Chelsea Publishing Series. Chelsea Publishing Company. ISBN 9780821841259.

KECHRIS, A. (1995). *Classical Descriptive Set Theory.* Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag. ISBN 9780387943749.

KELETI, T. (1999). A 1-dimensional subset of the reals that intersects each of its translates in at most a single point. *Real Anal. Exchange*, **24**(2), 843–845.

LACZKOVICH, M. (1988). Closed sets without measurable matching. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **103**(3), 894–896.

MATTILA, P. (1995). *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces: Fractals and Rectifiability.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press. ISBN 9780521465762.

ZAJÍCEK, L. (1987). Porosity and σ-porosity. *Real Anal. Exchange*, **13**(2), 314–350.

ZELENÝ, M. a PELANT, J. (2004). The structure of the σ-ideal of σ-porous sets. *Comment. Math. Univ. Carolin*, **45**(1), 37–72.